Problemes

Comencem amb l'agraïment, meu i, segur, de tots els amables seguidors d'aquesta secció, per a Xavier Ros Otón, de la Universitat de Texas a Austin, Gerard Planes Conangla i José Luis Díaz Barrero, de la UPC, i Miquel Amengual Covas, de Cala Figuera, Mallorca, pels enunciats respectius dels problemes **A129**, **A130**, **A131** i **A132**.

En el número 37 de la *SCM/Notícies* proposàvem quatre problemes, dels quals n'hem rebut solucions per a tres: Ernest Garriga, del Centre Sant Pau de Mataró, ens tramet la corresponent a l'**A126**, que publiquem, i ell mateix és l'autor de la solució, també publicada, del problema **A128**. Per al problema **A127** presentem la solució de Gerard Planes Conangla, i fem constar, a més, haverne rebut la de Miquel Amengual Covas. Del problema **A124**, en publiquem la solució de Roberto de la Cruz, del Centre de Recerca Matemàtica a Bellaterra, Barcelona. A tots els col·laboradors: moltíssimes gràcies pel vostre treball i interès!. Queda encara, sense resposta, el problema **A125**.

Insistim en els agraïments als lectors que ens proporcionen enunciats de problemes i/o ens n'envien les solucions. El correu electrònic per als enviaments és `carles.romero.c@gmail.com` i els materials escrits en TEX o LaTEX ens faciliten força la feina. Moltíssimes gràcies!

Problemes proposats

A129. (Proposat per Xavier Ros Otón, de la Universitat de Texas a Austin)
Sigui $\{a_k\}_{k\geq 0}$ una successió de nombres reals tal que, per a certa constant C, tenim

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k^2 \leq C a_N^2 \qquad \text{per a tot } N \geq 0$$

Demostreu que la sèrie $\sum_{k\geq 0} a_k$ és convergent.

A130. (Proposat per Gerard Planes Conangla, UPC, Barcelona.)
Demostreu que

$$\exp\left(\sum_p \frac{1}{p^2}\right) > \frac{15}{\pi^2}$$

on el sumatori recorre tots els nombres primers.

A131. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.)
Siguin a, b, i c tres nombres positius que fan $a+b+c=1$. Demostreu que

$$a\sqrt{\frac{bc}{a^3+b^3+c^3}} + b\sqrt{\frac{ca}{a^3+b^3+c^3}} + c\sqrt{\frac{ab}{a^3+b^3+c^3}} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

A132. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Sigui D el punt del costat BC d'un triangle $\triangle ABC$ tal que $BD = 2\cdot DC$ i sigui E el punt del segment AD tal que $AE : ED = 3 : 4$. Suposem que $\widehat{BED} = 60°$ i que $\widehat{DEC} = 30°$. Demostrau que el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.

Solucions

A124. (Proposat per Xavier Ros Otón, UPC, Barcelona.)
Sigui $f\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció definida en els punts del pla amb coordenades enteres. Suposem que el valor de la funció en tot punt és la mitjana aritmètica dels valors de la funció en els quatre punts adjacents a aquest, és a dir,

$$f(n,m) = \frac{f(n+1,m)+f(n-1,m)+f(n,m+1)+f(n,m-1)}{4}.$$

Demostreu que si f és acotada, aleshores és constant.

Solució: (Solució de Roberto de la Cruz, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra.)
Raonem per reducció a l'absurd, tot suposant que f no és constant. Aleshores hi ha, com a

mínim, dos punts veïns de $\mathbb{Z}^2$, en el quals f pren valors diferents. Siguin (x_0, y_0) i (x_0+1, y_0) aquests dos punts. Però, sense perdre generalitat, podem suposar que

$$f(x_0+1, y_0) > f(x_0, y_0).$$

Ara definim $g\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mitjançant

$$g(x,y) = f(x+1,y) - f(x,y).$$

És clar que g compleix la mateixa propietat que f i que també està acotada i, com que, almenys és positiva en el punt (x_0, y_0), si $K = \sup g(x,y)$, resulta $0 < K < \infty$.
Sigui ara $\epsilon > 0$. Per la definició de K, hi ha $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $g(a,b) > K - \epsilon$, però, com que $g(a,b)$ és la mitjana aritmètica dels seus veïns, veiem que:

$$\begin{aligned} g(a+1,b) &= 4g(a,b) - g(a-1,b) - g(a,b-1) \\ &\quad - g(a,b+1) \\ &> 4(K-\epsilon) - 3K = K - 4\epsilon \end{aligned}$$

i, en iterar el mateix argument, obtenim que

$$g(a+n,b) > K - 4^n\epsilon.$$

D'altra banda, de la definició de g en resulta:

$$f(a+n,b) - f(a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} g(a+i,b) \qquad (*)$$

i, aleshores,

$$\begin{aligned} f(a+n,b) - f(a,b) &= \sum_{i=0}^{n-1} g(a+i,b) \\ &> \sum_{i=0}^{n-1} \left(K - 4^i\epsilon\right) = nK - \epsilon\,\frac{4^n-1}{3}. \end{aligned}$$

Però l'expressió $f(a+n,b) - f(a,b)$ està acotada per, posem, K_1 com a cota superior. Aleshores, en escollir $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $nK > K_1 + 1$ i $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $\epsilon\,(4^n-1)/3 < 1$, s'obté

$$\begin{aligned} f(a+n,b) - f(a,b) &\le K_1 < nK - 1 \\ &< nK - \epsilon\,\frac{4^n-1}{3} \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} g(a+i,b), \end{aligned}$$

cosa que contradiu $(*)$, i, per tant, f és constant.

A126. (Proposat per Joan Josep Carmona, UAB, Bellaterra.)
Trobeu el mínim nombre natural $m \ge 2014$ que fa que el nombre combinatori

$$\binom{m}{1714}$$

sigui múltiple de 300.

Solució: (Solució d'Ernest Garriga. Centre sant Pau. Mataró.)
Posem $m = 1714 + k$. Busquem el mínim k que fa

$$\binom{m}{1714} = \frac{(1714+k)!}{1714!\;k!} \text{ múltiple de } 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Per a p primer, sigui $F_p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funció definida per

$$n! = p^{F_p(n)} q \quad \text{amb} \quad (p,q) = 1.$$

Observem que $F_p(n)$ és el nombre de zeros en què acaba l'expressió de $n!$ en base p i, si posem

$$G_p(k) := F_p(1714+k) - F_p(1714) - F_p(k)$$

la solució és el mínim k amb $G_2(k) \ge 2$, $G_3(k) \ge 1$ i $G_5(k) \ge 2$.
Sigui $n = d_r d_{r-1} \ldots d_2 d_1 d_0|_p$ l'expressió del nombre n en la base p. El nombre de factors de $n!$ que, en base p, tenen darrera xifra 0 és $d_r d_{r-1} \ldots d_2 d_1|_p$. Entre aquests el nombre dels que, a més, tenen la penúltima xifra 0 és $d_r d_{r-1} \ldots d_2|_p$, i procedint així, tenim que $n!|_p$ acabarà en $d_r d_{r-1} \ldots d_2 d_1|_p + d_r d_{r-1} \ldots d_2|_p + \cdots + d_r d_{r-1}|_p + d_r|_p$ zeros. Llavors, com que

$$\begin{array}{rcl} d_r d_{r-1} \ldots d_2 d_1|_p &=& \sum_{i=1}^r d_i p^{i-1} \\ d_r d_{r-1} \ldots d_2|_p &=& \sum_{i=2}^r d_i p^{i-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_r d_{r-1}|_p &=& \sum_{i=r-1}^r d_i p^{i-r+1} \\ d_r|_p &=& \sum_{i=r}^r d_i p^{i-r} \end{array}$$

tenim que

$$\begin{aligned} F_p(n) &= \sum_{i=1}^r d_i \left(p^{i-1} + \cdots + p + 1\right) \\ &= \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^r d_i \left(p^i - 1\right) = \\ &= \frac{1}{p-1} \left(\sum_{i=1}^r d_i p^i - \sum_{i=1}^r d_i\right) \\ &= \frac{1}{p-1} \left(\sum_{i=0}^r d_i p^i - \sum_{i=0}^r d_i\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p-1}\left(n - D_p(n)\right),$$

on $D_p(n)$ és la suma dels dígits de n en base p. Tornem al nostre cas:

$$\begin{aligned} G_p(k) &= F_p(1714+k) - F_p(1714) - F_p(k) = \\ &= \frac{1}{p-1}\left((1714+k-D_p(1714+k))\right. \\ &\quad \left.-(1714-D_p(1714)) - (k-D_p(k))\right) \\ &= \frac{D_p(1714)+D_p(k)-D_p(1714+k)}{p-1} \end{aligned}$$

i, de $1714 = 11010110010|_2 = 2100111|_3 = 23324|_5$, tenim $D_2(1714) = 6$, $D_3(1714) = 6$ i $D_5(1714) = 14$. Ara, les condicions sobre $G_p(k)$, $p = 2, 3, 5$ queden:

$$\begin{aligned} \Delta_2(k) &:= D_2(1714+k) - D_2(k) \leq 4 \\ \Delta_3(k) &:= D_3(1714+k) - D_3(k) \leq 4 \\ \Delta_5(k) &:= D_5(1714+k) - D_5(k) \leq 6. \end{aligned}$$

El primers nombres amb $\Delta_5(k) \leq 6$ són $k = 11, 12, 13, 14, 16, \ldots$, però $\Delta_2(11) = 5$, $\Delta_2(12) = 6$ i $\Delta_2(13) = 6$. En canvi $\Delta_2(14) = 1$ i, a més, $\Delta_3(14) = 0$. Per tant $k = 14$ i $m = 1728$.

A127. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.)
Siguin x, y i z tres nombres reals. Demostreu que

$$\sum_{cicle} \left(\frac{(x+1)^2+2}{y^2+z^2+2(y+z+3)}\right)^{1/2} > 2.$$

Solució: (Solució de Gerard Planes Conangla, UPC, Barcelona.)
Siguin $a, b, c \geq 0$ amb $a+b+c = 1$. Per la desigualtat de les mitjanes aritmètica i geomètrica aplicada a $2a$ i $2(1-a)$ és clar que

$$4a(1-a) \leq 1,$$

d'on

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}} \geq 2a$$

i, per tant

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}} + \sqrt{\frac{b}{1-b}} + \sqrt{\frac{c}{1-c}} > 2(a+b+c) = 2$$

o sigui,

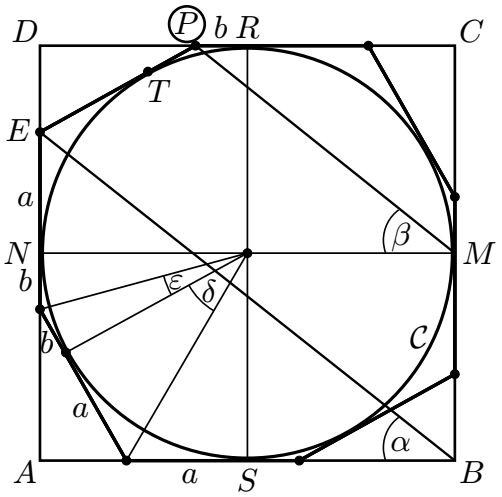
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

D'una banda, notem que la desigualtat és ara estricta (ja que la igualtat entre mitjanes només es donarà si $2a = 2(1-a)$ i, per tant, si $a = 1/2$, però no podem tenir igualtat simultàniament per a a, b i c ja que, aleshores, $a+b+c = 3/2$). D'altra banda, observem que un reescalat dels nombres a, b i c manté constant la banda esquerra de la desigualtat. En particular, podem trobar una constant que multiplicada per a, b i c ens permeti obtenir $\alpha, \beta, \gamma \geq 2$, que substituïm pels nombres anteriors a la desigualtat.
Finalment, amb els canvis de variable $(x+1)^2+2 = \alpha$, $(y+1)^2+2 = \beta$ i $(z+1)^2+2 = \gamma$, on x, y i z són nombres reals qualssevol, obtenim la desigualtat demanada

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}} + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma+\alpha}} + \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha+\beta}} > 2$$

$$\begin{aligned} &\sum_{cicle} \sqrt{\frac{(x+1)^2+2}{(y+1)^2+2+(z+1)^2+2}} \\ &\quad = \sum_{cicle} \sqrt{\frac{(x+1)^2+2}{y^2+z^2+2(y+z+3)}} > 2. \end{aligned}$$

A128. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Sigui M el punt mitjà del costat BC d'un quadrat $ABCD$, i sigui E un punt del costat AD de manera que $AE > ED$. Sigui H el punt del costat CD que fa que BE i MH siguin paral·lels. Provau que EH és tangent a la circumferència inscrita al quadrat $ABCD$.



Solució: (Solució d'Ernest Garriga, Centre sant Pau, Mataró.)

Partim del quadrat $ABCD$ i la seva circumferència inscrita $\mathcal{C}$, el radi de la qual prendrem com a unitat. Triem un punt E en el segment ND. Des de E fem les tangents a $\mathcal{C}$. Indiquem $a = \overline{NE}$ i $b = \overline{RP}$. Veurem que P és el punt H definit a l'enunciat.

Als triangles rectangles del tercer quadrant del dibuix, tenim:

$$\delta + \varepsilon = \frac{\pi}{4}\,, \quad \tan\delta = a\,, \quad \tan\varepsilon = b.$$

Llavors

$$1 = \tan(\delta + \varepsilon) = \frac{a+b}{1-ab},$$

equivalent a:

$$(1+a)(1+b) = 2.$$

Ara establirem el paral·elisme entre MP i BE:

$$\tan\alpha = \frac{1+a}{2} = \frac{1}{1+b} = \tan\beta$$

i, per tant, $P = H$.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Matemots

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al núm. 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Exemple: «Exclous l'ús de coordenades al pla» (9 lletres). La resposta és «descartes», ja que descartar és una forma d'excloure, i René Descartes fou un dels matemàtics que va introduir l'ús de coordenades al pla o a l'espai.

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[3]

1. Diagrama que ens ofereix un assortiment de conjunts i elements a canvi de diners.
2. Regla que permet calcular un límit en situació de malaltia.
3. Mètode d'integració numèrica desenvolupat a Springfield.
4. Successió que ajuda a dormir confortablement.
5. Criteri de convergència que ocasionalment trobem a les amanides.
6. Teorema útil per comptar els elements d'un grup de gallines o vedells.
7. Teorema que permet acabar una partida d'escacs en una jugada.
8. Teorema que ens dóna la probabilitat de trobar fruites carnoses al bosc.

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

[3] Respostes als Matemots: 3. Simpson, 7. Fermat, 1. Venn, 5. Raabe, 8. Bayes, 4. Cauchy, 2. L'Hôpital, 6. Lagrange.